Lewys Beispiel einer lösungslosen PDE mit glatten Koeffizienten

Im Jahre 1957 demonstrierte Hans Lewy anhand einer bestimmten PDE, dass nicht-analytische Anfangsdaten nicht zwangsläufig zu einer Lösung führen. Der erste Teil seines Beispiels ist in folgendem Satz zusammengefasst, zunächst aber:

0.1 Erinnerung Damit eine Funktion $f(z)$ analytisch ist, muss die den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügen, welche in der Gestalt

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0 \tag{1}$$

geschrieben werden können. ∘

0.2 Satz Seien x_1, x_2, y_1 unabhängige reelle Variable sowie $u(x_1, x_2, y_1)$ eine komplexwertige und $\psi(y_1)$ eine einmal differenzierbare reelle Funktion. Angenommen u löse die Gleichung

$$\left[-\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + 2\mathrm{i}(x_1 + \mathrm{i}x_2)\frac{\partial}{\partial y_1}\right] u = \psi'(y_1), \tag{2}$$

dann muss ψ reell-analytisch sein.

Beweis. Wir sind lediglich am Verhalten dieser Gleichung in einer Umgebung von $(x_1, x_2, y_1) \to (0, 0, \bar{y}_1)$ interessiert und integrieren hierfür die Gleichung zunächst entlang der Kreislinie

$$x_1^1 + x_2^2 =: y_2 \qquad \text{und} \qquad y_1 = \text{const} =: \bar{y}_1 \tag{3}$$

Um die gewünschte Analytizität von ψ zu zeigen beginnen wir damit, mithilfe der Koordinatentransformation

$$x_1 + \mathrm{i}x_2 = \sqrt{y_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{rcl} x_1 &=& \sqrt{y_2}\cos(\varphi) \\ x_2 &=& \sqrt{y_2}\sin(\varphi) \end{array} \tag{4}$$

die Originalgleichung (2) in die folgende Gleichung zu transformieren:

$$\frac{\partial U}{\partial y_1} + \mathrm{i}\,\frac{\partial U}{\partial y_2} = \pi\,\psi'(y_1) \qquad \text{wobei} \qquad U(y_1, y_2) := \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sqrt{y_2}\,u \tag{5}$$

welche wir danach weiter auf (1) zurückführen werden. Für dieses Unterfangen wir betrachten wir zunächst die folgenden hilfreichen Zwischenrechnungen bzw. -bemerkungen:

1. Wir schreiben das Differential $\partial_{x_1} + \mathrm{i}\partial_{x_2}$ um auf ein Differential für $\ln(\sqrt{y_2})$ und φ: Aus (4), in beide Richtungen angewandt, erhalten wir zunächst

$$\frac{\partial}{\partial \ln(\sqrt{y_2})} = \frac{\partial x_1}{\partial \ln(\sqrt{y_2})}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \ln(\sqrt{y_2})}\frac{\partial}{\partial x_2} = x_1\,\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\,\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial x_1}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial x_2} = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$$

In weiser Voraussicht addieren wir das Resultat wie folgt auf:

$$\frac{\partial}{\partial\ln(\sqrt{y_2})} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} = (x_1 - \mathrm{i}x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 + \mathrm{i}x_1)\frac{\partial}{\partial x_2} = (x_1 - \mathrm{i}x_2)\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

wobei aus der zweiten Klammer ein i herausgehoben wurde. Eine triviale Umformung, danach Erweitern mit $x_1 + \mathrm{i}x_2$ sowie wie das Benützen von (3) und (4) liefert schließlich

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{\sqrt{y_2}}\left(\frac{\partial}{\partial\ln(\sqrt{y_2})} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

2. Mittels den üblichen Differentationsregeln folgt

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial}{\partial y_2}\left(u\sqrt{y_2}\right) &= 2\sqrt{y_2}\frac{\partial u}{\partial y_2} + 2u\frac{\partial\sqrt{y_2}}{\partial y_2} = 2\sqrt{y_2}\frac{\partial\ln(\sqrt{y_2})}{\partial y_2}\frac{\partial u}{\partial\ln(\sqrt{y_2})} + \frac{u}{\sqrt{y_2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y_2}}\left(\frac{\partial}{\partial\ln(\sqrt{y_2})} + 1\right)u \end{aligned}$$

Beachte, dass $u(x_1, x_2, y_1)$ über die Koordinatentransformation (4) zu einer von y_2 abhängigen Funktion geworden ist.

3. Für ψ als nicht von x_1 oder x_2 und in dieser Folge auch nicht von der neuen Koordinate φ abhängigen Funktion gilt klarerweise

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,\psi'(y_1) = 2\pi\,\psi'(y_1)$$

4. Aufgrund der Periodizität von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ sowie der Transformation auf (und damit auch der Koordinate) φ fällt im Integral

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\frac{\partial u}{\partial\varphi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}u\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{\mathrm{i}}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}u = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}u$$

der Randterm weg, sodass wir in diesem Integral die Ableitung ∂_φ gegen eine Multiplikation mit i eintauschen dürfen.

5. Zuletzt sei, direkte Folgerung der Definition von U,

$$\frac{\partial U}{\partial y_1} = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sqrt{y_2}\,\frac{\partial u}{\partial y_1}$$

angemerkt, da einzig u von y_1 abhängt.

Nun können wir diese Resultate anwenden, wobei wir der besseren Übersichtlichkeit halber die Zielgleichung (5) in die Originalgleichung (2) überführen wollen anstatt umgekehrt. Mögen sich die Zahlen in der geschwungenen Klammer über den Gleichheitszeichen auf die Nummerierung der obigen Aufzählung beziehen und möge man beachten, dass wir oftmals die Resultate von rechts nach links anstatt umgekehrt verwenden, so erhalten wir, ausgehend von der Gleichung (5) in der Mitte, einerseits

$$\mathrm{i}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\sqrt{y_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\frac{\partial u}{\partial y_1} + \mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial y_2} \overset{\{5\}}{=} \boxed{\frac{\partial U}{\partial y_1} + \mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial y_2} = \pi\,\psi'(y_1)} \overset{\{3\}}{=} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,\psi'(y_1)$$

Als nächsten Schritt schreiben der das zweite (übrig bleibende) der beiden Differentiale auf der linken Seite um, d.h.:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial y_2} &= \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\mathrm{i}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \sqrt{y_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} u\right) = -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\sqrt{y_2}\, u\right) \\
&\overset{\{2\}}{=} -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\frac{1}{\sqrt{y_2}}\left(\frac{\partial}{\partial \ln(\sqrt{y_2})} + 1\right) u \\
&\overset{\{4\}}{=} -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{\sqrt{y_2}}\left(\frac{\partial}{\partial \ln(\sqrt{y_2})} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) u \\
&\overset{\{1\}}{=} -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) u
\end{aligned}
$$

wobei in der ersten Zeile Integration und Differentiation vertauscht wurden. Setzen wir dies in die obige Gleichung ein, so erhalten wir nach Multiplikation mit 2 und dem Überführen der rechten auf die linke Seite

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\left[-\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) u + 2\mathrm{i}\sqrt{y_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\frac{\partial u}{\partial y_1} - \psi'(y_1)\right] = 0$$

wobei sich der Koeffizient vor der ∂_{y_1}-Ableitung mithilfe von (4) leicht auf die Gestalt des entsprechenden Koeffizienten in (2) bringen lässt. Kürzer aufgeschrieben bedeutet dies

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\ \ [\text{Gleichung (2)}] = [\text{Gleichung (5)}] \tag{6}$$

Wir können also davon ausgehen, dass – unter Voraussetzung, dass sämtliche Terme auf eine Seite gebracht wurden – das Verschwinden von Gleichung (5) sicherlich eintritt, wenn (2) verschwindet (aber nicht zwangsläufig umgekehrt). Nun haben wir aber (2) vorausgesetzt, also dürfen wir getrost mit (5) weiterarbeiten. Definieren wir nun die neue Funktion

$$V(y_1, y_2) := U(y_1, y_1) - \pi\,\psi(y_1)$$

so erkennt man mit freiem Auge oder durch Einsetzen in den Integranten von (5), dass diese Funktion die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichung(en)

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} + \mathrm{i}\frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{mit} \quad z = x_1 + \mathrm{i}x_2$$

erfüllt, also ist $V(y_1, y_2)$ eine analytische Funktion. Damit ist auch $V(y_1, 0) = -\pi\,\psi(y_1)$, wobei wir die direkt aus der Definition von U folgende Eigenschaft $U(y_1, y_2 = 0) = 0$ benützt haben, und somit $\psi(y_1)$ analytisch – zumindest in einer Umgebung von $(0, 0, \bar{y}_1) \mathrel{\hat{=}} (y_2 = 0, y_1)$ nach Zusammenziehen des Integrationskreises auf einen Punkt ($y_2 \to 0$). ✓

0.3 Bemerkung.

1. Beachte, dass die Umkehrung des Satzes aufgrund (6) nicht gelten muss. Um das Gegenbeispiel zu vervollständigen bedarf es daher der Konstruktion eines ψ so, dass man hierzu kein u finden kann.

2. Der Beweis in der Originalliteratur wird in die andere Richtung geführt. ×

Literatur: Hans Lewy: *An Example of a smooth linear Partial Differential Equation without Solution*; »The Annuals of Mathematics«, Second Series, Vol. 66, No. 1, pp. 155-158, July 1957